3.4 Jednoduché komplexné vlastné hodnoty

Vlastný vektor odpovedajúci komplexnej vlastnej hodnote $\lambda = a + ib$ je komplexný vektor $\mathbf{r}$ a odpovedajúca komplexná vektorová funkcia je

$$\mathbf{r}e^{(a+ib)} = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t). \qquad (3.15)$$

Reálne funkcie $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ sú lineárne nezávislé riešenia daného systému diferenciálnych rovníc.

Príklad 1.5.2 *Riešme systém*

$$\begin{aligned} x_1' &= -7x_1 + x_2, \\ x_2' &= -2x_1 - 5x_2. \end{aligned}$$

Riešenie: Vlastný vektor $\mathbf{r} = (\alpha, \beta)^T$ je riešením lineárneho homogénneho systému rovníc

$$\begin{aligned} (-7-\lambda)\alpha + \quad & \beta = 0, \\ -2\alpha + \quad & (-5-\lambda)\beta = 0. \end{aligned}$$

Vlastné hodnoty danej matice sú korene charakteristickej rovnice

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0.$$

Dostávame $\lambda_{12} = -6 \pm i$. Vlastný vektor je $\mathbf{r} = (1, 1+i)^T$. Potom $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ sú dve lineárne nezávislé riešenia, pričom

$$\mathbf{u_1}(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{r}e^{(-6+i)t}), \mathbf{u}_2(t) = \mathrm{Im}(\mathbf{r}e^{(-6+i)t}) \ ,$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}e^{(-6+i)t} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(-6+i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{-6t}(\cos t + i \sin t) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{-6t} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-6t}. \end{aligned}$$

Všeobecné riešenie je

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{-6t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-6t}$$

kde C_1, C_2 sú ľubovoľné konštanty.

Poznámka 1.5.2: *Keď použijeme:*

- *MAPLE, dostaneme fundamentálnu maticu nasledovným postupom:*

```
> with(DEtools):
A := matrix(2,2,[-7,1,-2,-5]);
U := matrixDE(A,t);
```

$$A := \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$U := \left[\begin{bmatrix} e^{(-6t)}\sin(t) & e^{(-6t)}\cos(t) \\ e^{(-6t)}\sin(t) + e^{(-6t)}\cos(t) & e^{(-6t)}\cos(t) - e^{(-6t)}\sin(t) \end{bmatrix}, [0, 0] \right]$$

```
> riesenie:=matrix([[exp(-6*t)*sin(t), exp(-6*t)*cos(t)], [exp(-
6*t)*sin(t)+exp(-6*t)*cos(t), exp(-6*t)*cos(t)-exp(-
6*t)*sin(t)]])*matrix(2,1,[C1,C2]);
```

$$riesenie := \begin{bmatrix} e^{(-6t)}\sin(t) & e^{(-6t)}\cos(t) \\ e^{(-6t)}\sin(t) + e^{(-6t)}\cos(t) & e^{(-6t)}\cos(t) - e^{(-6t)}\sin(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

- MATLAB, dostaneme vlastné hodnoty a vlastné vektory nasledovným postupom:

```
>> A=[-7 1;-2 -5]
A =-7   1
    -2  -5
>> [vlastné vektory, vlastné hodnoty]=eig(A)

vlastné vektory =   0.4082+0.4082i   0.4082 - 0.4082i
                          0 +0.8165i         0 - 0.8165i


vlastné hodnoty=          -6.0000+1.0000i              0

                                0              6.0000-1.0000i.
```

- Riešenie pomocou MATLABu:

```
>> A=[-7 1;-2 -5]
A =
   -7    1
   -2   -5
>> syms C1 C2 t x
>> riesenie=expm(A*t)*[C1;C2]

riesenie =
   (exp(-6*t)*cos(t)-exp(-6*t)*sin(t))*C1+exp(-6*t)*sin(t)*C2
 -2*exp(-6*t)*sin(t)*C1+(exp(-6*t)*cos(t)+exp(-6*t)*sin(t))*C2
```

- Ďalšia možnosť riešenia pomocou MATLABu:

```
>> [x1,x2]=dsolve('Dx1=-7*x1+x2, Dx2 =-2*x1-5*x2')

x1 =
exp(-6*t)*(C1*sin(t)+C2*cos(t))
x2 =
exp(-6*t)*(C1*sin(t)+C1*cos(t)+C2*cos(t)-C2*sin(t))
```